

Αλγεβρικές Δομές I

4 Ιουνίου 2019

1. (2 μονάδες) Να εξετάσετε ποιό από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστό και ποιό είναι λανθασμένο. Αν πιστεύετε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι σωστός να δώσετε απόδειξη, διαφορετικά να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

- Η τάξη μιας κυκλικής ομάδας είναι πρώτος αριθμός.
- Δεν υπάρχει δακτύλιος με 8 στοιχεία.
- Κάθε ομάδα τάξης 13 είναι αβελιανή.
- Κάθε ομάδα τάξης 40 είναι αβελιανή.

2. (1 μονάδα) Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{20}$ με τύπο $\varphi(m, n) = [16m + 10n]_{20}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Είναι το σύνολο $\{(5l, 4s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid l, s \in \mathbb{Z}\}$ ιδεώδες του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

3. (1 μονάδα) Έστω F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι με πράξεις $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ και $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ το F είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα (μοναδιαίο στοιχείο). Έστω $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$\phi(g) = \int_0^1 g(x) dx$$

Είναι η απεικόνιση ϕ ομομορφισμός ομάδων; Είναι η απεικόνιση ϕ ομομορφισμός δακτυλίων;

4. (1 μονάδα) Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 169.

5. (1 μονάδα) Βρείτε όλες τις υποομάδες της \mathbb{Z}_{24} και σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse. Ποιες από τις υποομάδες είναι μη κυκλικές;

6. (1 μονάδα) Θεωρούμε την συνάρτηση $\sigma : \{1, \dots, 16\} \rightarrow \{1, \dots, 16\}$ με $\sigma(x) = x + 4$ αν $x \leq 12$ και $\sigma(x) = x - 12$ αν $x > 12$. Δείξτε ότι η σ είναι στοιχείο της υποομάδας A_{16} της ομάδας μεταθέσεων S_{16} . Υπολογίστε το σ^{2010} .

7. (1 μονάδα) Δείξτε ότι η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 / \langle ([2]_4, [3]_8) \rangle$ είναι ισόμορφη με την \mathbb{Z}_{12} .

8. (1 μονάδα) Δείξτε ότι μια κυκλική ομάδα έχει το πολύ ένα στοιχείο τάξης 2.

9. (1 μονάδα) Πόσα στοιχεία τάξης 2 και πόσα τάξης 3 έχουν οι παρακάτω ομάδες

$$\mathbb{Z}_8 \times S_3, \quad A_4 \times \mathbb{Z}_4.$$

Είναι οι ομάδες ισόμορφες;

Καλή επιτυχία